Uppeldi og menntun
21. árgangur 1. hefti 2012

FRIÐRIK DIEGO
MENNTAVÍSINDASVIÐI HÁSKÓLA ÍSLANDS
KRISTÍN HALLA JÓNSDÓTTIR
MENNTAVÍSINDASVIÐI HÁSKÓLA ÍSLANDS

Undirbúningur verðandi stærðfræðikennara í ljósi hugtakaskilnings og hugsmíðahyggju

Í greininni er fjallað um rannsókn á hugtakaskilningi verðandi stærðfræðikennara. Hugtakaskilningur og röksemdafærsla eru undirstöðuþættir í stærðfræðilegri hæfni og samkvæmt hugsmíðahyggju er aðalhlutverk stærðfræðikennara að skapa aðstæður sem ýta undir það að hugtakaskilningur nemenda þeirra mótist. Markmið rannsóknarinnar var að kanna hugtakaskilning og stærðfræðilega ígrundun þátttakenda til að leggja mat á það hvort undirbúningur í fræðilegri stærðfræði í kennaranámi tæki nægilegt mið af því að undirbúa nemendur undir að starfa af fagmennsku í anda hugsmíðahyggju. Þátttakendur voru tólf kennaranemar, allir á stærðfræðikjörsviði. Gagnaöflun fólst í að leggja fyrir þátttakendur verkefni af nokkrum sviðum stærðfræðinnar og greina glímu þeirra við viðfangsefnin bæði með umræðum og yfirferð á skriflegum úrlausnum. Niðurstöður benda til þess að í kennaranámi þurfi að leggja meiri áherslu á að styðja kennaranema til að fóta sig vel í hugtakaheimi stærðfræðinnar og í heimi formlegrar stærðfræði þar sem röksemdafærsla skipar öndvegi.

Efnisorð: Stærðfræðilegur undirbúningur, hugtakaskilningur, hugsmíðahyggja, starfshæfni, gagnrýnin og greinandi hugsun, þrautalausnir

INNGANGUR

Á undanförnum árum hefur hugmyndafræði sem kallast hugsmíðahyggja (e. constructivism) notið aukinnar hylli og hún verið talin mikilvæg í stærðfræðikennslu. Samkvæmt henni eiga nemendur að byggja sjálfir upp skilning sinn á sérhverju stærðfræðilegu hugtaki og aðalhlutverk kennarans er ekki að segja frá, útskýra eða á annan hátt að reyna að yfirfæra stærðfræðiþekkingu til nemandans. Kennarinn á að skapa aðstæður sem ýta undir það að hugtakaskilningur nemandans mótist skref fyrir skref og þá er nauðsynlegt að hann fylgist með nemandanum við námið, ræði við hann og spyrji spurninga (Math Forum, 2009). Kilpatrick (1987) kemst svo að orði að ein meginsýn þeirra sem aðhyllast hugsmíðahyggju sé að þekking sé byggð upp á vitrænan hátt af virkum einstaklingi en ekki móttekin á óvirkan hátt frá umhverfinu. Hann fullyrðir að nánast allir fræðimenn á sviði stærðfræðimenntunar séu sammála um þetta.

Hugmyndir um hugsmíði eru til í fleiri en einni mynd og ekki er aðeins um eina sýn á nám og kennslu að ræða. Í áhugaverðri grein frá árinu 2000, *Constructivism in science and mathematics education,* segir meðal annars:

> Enda þótt hugsmíðahyggja hafi byrjað sem kenning um nám, þá hefur hún fært út kvíarnar og nær nú til kenningar um kennslu, kenningar um menntun, kenningar um uppruna hugmynda og kenningar um bæði persónulega þekkingu og vísindalega þekkingu. Satt að segja þá hefur hugsmíðahyggja haslað sér völl innan menntavísinda sem afbrigði af alsameinaðri sviðskenningu (e. grand unified theory). (Matthews, 2000, bls. 161, íslensk þýðing greinarhöfunda)

Matthews (2000) bendir á að hugsmíðahyggja einskorðist ekki við fræðasamfélög heldur hafi fylgismenn stefnunnar haft áhrif á margar stefnumótandi skýrslur í skólamálum og námskrár og nefnir hann ýmis þekkt dæmi um slíkt. Confrey og Kazak (2006) segjast flokka hugsmíðahyggju á sviði stærðfræðimenntunar sem höfuðkenningu (e. grand theory) í þeim skilningi að hún sé viðtekinn rannsóknarrammi á sviðinu og hafi skapað aðferðir til að lyfta rannsóknum á stærðfræðinámi barna á nýtt stig þar sem hugsun, skilningur og aðferðir barnsins liggja til grundvallar.

Árið 2001 kom út í Bandaríkjunum á vegum National Research Council viðamikil skýrsla sem bar titilinn *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Í 4. kafla hennar, sem fjallar um stærðfræðilega kunnáttu og færni, er lögð áhersla á hugtakaskilning. Þar segir meðal annars að nemendur sem skilji þau hugtök og aðferðir sem þeir fást við kunni meira en einangraðar staðreyndir og aðferðir. Þeir skilji hvers vegna stærðfræðilegt fyrirbrigði sé mikilvægt og í hvers konar samhengi það reynist nytsamlegt. Síðar í sama kafla segir að til að ná raunverulegri kunnáttu þurfi nemendur að verja miklum tíma í stærðfræðiiðkun – leysa þrautir, rökstyðja, þróa skilning, þjálfa færni og byggja brýr milli fyrri þekkingar og nýrrar þekkingar (Kilpatrick, Swafford og Findell, 2001).

Í lokakafla framangreindrar greinar sinnar segir Matthews (2000) að hugsmíðahyggja hafi lagt mikið af mörkum á sviði raungreina- og stærðfræðimenntunar með því að vekja kennara til vitundar um mikilvægi fyrra náms og fyrirliggjandi hugtakaskilning þegar nýtt nám á sér stað og einnig með því að leggja áherslu á skilning sem markmið í raungreina- og stærðfræðikennslu og með því að ýta undir virka þátttöku nemenda í tímum. Hann bætir þó við að með réttu megi segja að þetta séu velþekkt kennslufræðileg atriði sem hafi notið viðurkenningar allt frá dögum Sókratesar, þar sé um að ræða kennslufræði í anda hugsmíðahyggju en án hins þekkingarfræðilega hluta kenningarinnar.

Hér á landi er á vegum Námsgagnastofnunar nýlokið gerð stærðfræðinámsefnis fyrir grunnskóla sem er í anda hugsmíðahyggju. Rík áhersla er lögð á að stærðfræðinámið byggist á skilningi nemandans. Bækurnar fyrir miðstig bera heitið *Geisli* og í inngangi kennsluleiðbeininga með fyrsta heftinu segir að við tíu ára aldur sé mikilvægt að nemendur læri að koma skipan á þekkingu sína og þjálfist í að skoða skilning sinn á fyrirbrigðum stærðfræðinnar (Guðbjörg Pálsdóttir, Guðrún Angantýsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir, 2011). Bækurnar fyrir efstu bekki heita *8–tíu* og í kennsluleiðbeiningum með fyrsta hefti þess bókaflokks er fjallað um stærðfræðikennslu. Þar segir: „Áhugi hefur skapast á þróun kennsluhátta með það markmið að búa nemendum aðstæður til að byggja upp hugtakaskilning sinn til þess að þeir geti náð betri árangri í stærðfræðinámi sínu" (Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir, 2006, bls. 6).

Hugsmíðahyggja snýst um það hvernig einstaklingur lærir og hún gerir nýjar kröfur til nemenda og kennara. Það er álit fræðimanna á sviði stærðfræðimenntunar að hlutverk kennarans skipti sköpum um það hvernig til tekst og kennarinn verði að finna út hvað nemandinn er að hugsa eigi hann að geta stuðlað að því að nám sem byggist á skilningi nemandans eigi sér stað (Math Forum, 2009). Það gefur auga leið að til þess að kennarinn megi verða sá lærimeistari sem hér er stefnt að er óhjákvæmilegt að skilningur hans á stærðfræðiverkefni sem nemandi hans glímir við sé djúpur, hann hafi sjálfur brotið verkefnið til mergjar og sjái það í mun víðara samhengi en raunhæft er að ætlast til að nemandi hans geri.

Í þessari grein er fjallað um stærðfræðiverkefni sem höfundar lögðu fyrir nokkra kennaranema og glímu nemanna við þau. Rannsóknin fór fram á fyrsta áratug 21. aldar en til að auka á nafnleynd þátttakenda er ekki tekið nákvæmar fram hvenær það var. Þegar vísað er til kennaradeildar kann að vera átt við deild innan Háskóla Íslands eða deild innan Kennaraháskóla Íslands. Markmið rannsóknarinnar var að kanna hugtakaskilning og stærðfræðilega ígrundun þátttakenda og leggja með því mat á það hvort undirbúningur í fræðilegri stærðfræði í kennaranámi tæki nægilegt mið af því að undirbúa nemendur undir að starfa af fagmennsku í anda hugsmíðahyggju. Verkefnin voru af ólíkum sviðum stærðfræðinnar, meðal annars úr talnafræði, algebru og rúmfræði. Þau hafa þráfaldlega komið við sögu í kennslu greinarhöfunda á liðnum árum og sum þeirra mætti raunar telja sígild stærðfræðidæmi.

BAKSVIÐ

Straumar og stefnur í stærðfræðikennslu taka breytingum í áranna rás og segja má að nú sé það pólitískur vilji hér á landi að kennslan sé í anda hugsmíðahyggju og lögð meiri áhersla á lausnir þrauta og greinandi hugsun en var á árum áður. Til að varpa ljósi á þetta er hér rakin í stuttu máli þróun aðalnámskrár grunnskóla enda hafa nýjar áherslur endurspeglast í námsefni í stærðfræði bæði í kennaranámi og í grunnskóla. Einnig er hér stutt umfjöllun um þrautalausnir sem hafa fengið síaukið vægi í stærðfræðikennslu.

Námskrár

Í íslenskum námskrám fyrir skyldunám hefur kennslufræði verið meiri gaumur gefinn hin síðari ár en áður var. Í *Námsskrá fyrir nemendur á fræðsluskyldualdri* sem gefin var út 1960 í samræmi við lög um fræðslu barna nr. 34/1946 kemur fram að námskráin hafi fyrst og fremst því hlutverki að gegna að leiðbeina kennurum og skólastjórum um starfstilhögun og námsefni í hinum ýmsu námsgreinum (Menntamálaráðuneytið, 1960). Eftir gildistöku laga um grunnskóla nr. 63/1974 var námskráin frá 1960 leyst af hólmi með aðalnámskrá grunnskóla árið 1976 sem skiptist í hefti: Almennan hluta og sérstök hefti fyrir einstakar námsgreinar. Heftið um námsgreinina stærðfræði kom að vísu aldrei út. Í almenna hlutanum er meðal annars fjallað um breytt viðhorf til námssamskipta og hvernig verða megi við þeim kröfum sem af þeim stafa. Talað er um listina að spyrja og mikilvægi spurninga í námssamskiptum (Menntamálaráðuneytið, skólarannsóknadeild, 1976).

Árið 1989 kom út endurskoðuð aðalnámskrá grunnskóla. Nokkurt nýnæmi var að sérstökum kafla um nám og kennslu. Í þessari námskrá var í fyrsta sinn frá gildistöku grunnskólalaganna sérstakur kafli helgaður stærðfræði og þar er eitt af sjö meginmarkmiðum með kennslu í stærðfræði sagt vera: „Að nemendur temji sér að beita stærðfræði við ný viðfangsefni þegar við á, hvort sem er í dagsins önn eða fræðilegri viðleitni, og fái þannig tækifæri til að beita ímyndunarafli sínu og frumkvæði" (Menntamálaráðuneytið, 1989, bls. 142).

Nýjasta aðalnámskrá grunnskóla í stærðfræði er frá árinu 2007. Hún er endurskoðuð útgáfa námskrár frá 1999 en námskrárnar eru í veigamiklum atriðum eins. Í þeim báðum eru markmið greinarinnar flokkuð í tíu flokka eftir því hvort þau snerta inntak eða varða aðferðir. Flokkarnir eru þeir sömu; sex fjalla um inntak en fjórir um aðferðir og þar er lögð áhersla á þátt tungumálsins, lausnir verkefna og þrauta, röksamhengi og röksemdafærslur, tengsl stærðfræðinnar við daglegt líf og önnur svið. Fram kemur að þótt námsefnið sé aðgreint á þennan hátt í flokka aðferða og inntaks sé mikilvægt að flétta inntak og aðferðir saman þannig að nemendur skynji námsefnið sem samstæða heild og það laði fram jákvæð viðhorf þeirra. Nemendur ættu að skynja nám í stærðfræði sem ferli og skapandi athöfn fremur en söfnun afmarkaðrar kunnáttu og þekkingar (Menntamálaráðuneytið, 1999, 2007). Þá segir að skilningur og kunnátta þurfi að haldast í hendur:

> Skilningur á hugtaki felst m.a. í að setja það í sem víðtækast samhengi við alla aðra tiltæka kunnáttu. Skilningur vex eftir því sem tengsl hugtaks við fleiri og fleiri hluti verða ljósari. Því verður ætíð að gera ráð fyrir að nemendur kynnist fleiri þáttum í stærðfræði en búast má við að þeir nái fullu valdi á. (Menntamálaráðuneytið, 1999, bls. 8; 2007, bls. 6)

Um kennslu í stærðfræði segir meðal annars að hún þurfi að efla rökfasta hugsun en hún þurfi einnig að efla hugkvæmni. Hún þurfi að laða fram gagnrýna og greinandi hugsun hjá nemandanum en einnig sjálfstraust, forvitni og löngun til að rannsaka og leita lausna á hinu óþekkta (Menntamálaráðuneytið, 1999, 2007). Greinarhöfundar telja ljóst að hér sé ætlast til mikils af stærðfræðikennurum og sú spurning hlýtur að vakna hvort ekki þurfi að leggja meiri áherslu á að rækta þessa þætti í námi verðandi kennara en verið hefur, hugsanlega með því að auka þátt þrautalausna í náminu.

Þrautalausnir

Í stærðfræði er orðið þraut notað í víðri merkingu og táknar viðfangsefni af hvaða gerð sem er sem ekki liggur í augum uppi hvernig má leysa. Orðið er þýðing á enska orðinu *problem* og þrautalausnir er þýðing á *problem solving*. Sá sem stendur frammi fyrir því að leysa þraut verður að brjóta hana til mergjar og öðlast nægan skilning á verkefninu til að geta á vitrænan hátt komið auga á vænlega leið til að takast á við það. Að flestra hyggju hefur glíma við þrautir almenna skírskotun og nám í þrautalausnum, þar sem meðal annars er fengist við stærðfræðilegar þrautir, því almennt gildi. Skilningur og ígrundun eru lykilatriði ef vel á að takast til í glímunni við þrautir, en auk þess er gagnrýnin og greinandi hugsun nauðsynleg til að leggja mat á eigin lausnaleið eða annarra. Í yfirlitsgreininni *A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME* segja höfundarnir, Confrey og Kazak (2006), að strax með fyrstu kenningunum um þrautalausnir hafi komið fram margir lykilþættir í þankagangi hugsmíðahyggju og í reynd séu þrautalausnir hluti af rótarkerfi kenningarinnar.

Pólya hefur skrifað fjórar bækur um það hvernig kenna megi og læra að leysa þrautir. Þetta viðfangsefni Pólya mætti nefna þrautalausnatækni (e. heuristics). Frægust þessara bóka er án efa *How to solve it* frá árinu 1945 en í henni leggur Pólya fram almennan leiðarvísi eða líkan um það hvernig leysa má þraut af hvaða gerð sem er. Hann gefur kennurum góð ráð í glímunni við að kenna nemendum að takast á við að leysa stærðfræðilegar þrautir og í bókinni er að finna aragrúa af leiðbeinandi hugtökum og skrefum fyrir kennara og nemendur sem tengjast þessu. Pólya setur fram líkan fyrir þrautalausnaferli sem greinarhöfundar nota ásamt öðrum viðmiðum til að greina lausnir þátttakenda. Líkanið er í fjórum meginskrefum, sem eru: Að skilja verkefnið, að gera lausnaráætlun, að framkvæma áætlunina, að líta til baka (Pólya, 1945). Confrey og Kazak (2006) telja að hin fjögur skref Pólya hafi sýnt að stærðfræði sé meira en safn af formlegum skilgreiningum, setningum og sönnunum og viðurkennt réttilega að meginhlutverk þrauta sé að kalla á nýjar lausnir. Með þessu hafi fræðasviðið verið knúið áfram.

Hæfni í þrautalausnum má lýsa sem hæfninni til að geta greint, afmarkað og sett fram stærðfræðileg viðfangsefni af hinum ýmsu gerðum og að geta með stærðfræðilegri röksemdafærslu brotið slík verkefni til mergjar og leyst jafnvel á fleiri en einn veg. Meðal þeirra sem tekið hafa við keflinu af Pólya í skrifum um þrautalausnir er Schoenfeld sem hefur rannsakað vinnulag fjölda einstaklinga. Hann fjallar ekki aðeins um þrautalausnatækni sem slíka heldur er sjóndeildarhringurinn víðari í athugun á háttalagi þess sem glímir við þraut. Í stuttu máli má segja að Schoenfeld greini í fernt það sem mestu skiptir þegar fengist er við stærðfræðilegar þrautir. Þessir fjórir þættir eru: Þekkingarforði, þrautalausnatækni, skipulag, viðhorf (Schoenfeld, 1985).

Í námskeiðslýsingum skyldunámskeiða á kjörsviðinu stærðfræði í kennaranámi við Háskóla Íslands er þrautalausna hvergi getið sem sérstaks áhersluþáttar. Hins vegar var fimm eininga valnámskeið samkvæmt kennsluskrá háskólaársins 2009–2010, GLS003G Þrautagleði, alfarið helgað þessum þætti. Markmið þess var þríþætt: „Að nemendur rækti með sér þá ánægju sem felst í því að glíma við þrautir, þeir þjálfi hæfileika sína til þrautalausna og loks að þeir þjálfist í að setja fram lausnir sínar, sér í lagi m.t.t. vandaðs rökstuðnings“ (Háskóli Íslands, 2009).

Starfshæfni stærðfræðikennara

Hugtökin kunnátta, geta og hæfni hafa alla tíð verið samofin hugmyndum um nám og kennslu. Ragnhildur Bjarnadóttir hefur í skrifum sínum fjallað um hæfnihugtakið í tengslum við kennaramenntun (Ragnhildur Bjarnadóttir, 2004, 2005, 2008). Í greininni *Starfshæfni kennara frá sjónarhóli norrænna kennaranema* segir Ragnhildur að hugtakið hæfni hafi á undanförnum áratug verið notað í auknum mæli til að tilgreina námsmarkmið, meðal annars í kennaranámi. Það hafi fengið byr undir báða vængi undir aldamótin en þá með breyttum skilgreiningum og að nú tengist hæfnihugtakið bæði námshugtakinu og umræðunni um fagmennsku kennara (Ragnhildur Bjarnadóttir, 2008). Starfshæfni kennara skilgreinir Ragnhildur sem „þekkingu, færni og eiginleika sem kennarar eru færir um að beita í starfi á markvissan og viðurkenndan hátt miðað við aðstæður, félagslegt samhengi og faglegt viðmið“ (Ragnhildur Bjarnadóttir, 2008, bls. 56). Þá skilgreinir Ragnhildur eftirfarandi hliðar á starfshæfni kennara: Að gera, að þekkja/vita, að ígrunda, að vera (Ragnhildur Bjarnadóttir, 2004). Það skal tekið fram að sú ígrundun sem Ragnhildur fjallar um snýr að sjálfskoðun kennaranemans og því að hann ígrundi kennarastarfið en í rannsókn þeirri sem hér er til umfjöllunar er lögð áhersla á að kennaraneminn ígrundi það stærðfræðiverkefni sem hann glímir við hverju sinni.

Ragnhildur gerði könnun á því hvernig kennaranemar í Kennaraháskóla Íslands töldu námið í skólanum styðja við starfshæfni sína. Í ljós kom meðal annars að það var áberandi að nemendur vildu þekkja og vita meira. Hvað varðar þekkingu sem tengist skólanámsgreinum töldu 22% nemanna kennaranámið ekki hafa stutt vel við sig en 18% að það hefði stutt vel við sig. Þá kom fram að 65% nemanna töldu að áherslan á þessa þætti hefði átt að vera meiri (Ragnhildur Bjarnadóttir, 2005).

Í framangreindum námskrám fyrir skyldunám er ekki rætt sérstaklega um hæfni stærðfræðikennara. Í námskránni frá 1960 má segja að tvær setningar séu það eina í þessa veru en þar segir að reikningskennslan eigi að vera traust eins og keðja, þar sem allir hlekkir séu jafnsterkir og að hvergi megi hlaupa yfir eða fara of hratt, heldur skuli feta jafnt og þétt áfram svo að alls staðar náist örugg fótfesta (Menntamálaráðuneytið, 1960). Í námskránni frá 1976 var ekki sérstök umfjöllun um stærðfræði eins og áður segir. Úr námskránni frá 1989 mætti gefa dæmi um einstakar setningar sem lúta að hæfni stærðfræðikennara.

Áður hefur verið vitnað í stærðfræðihluta aðalnámskrár grunnskóla frá 1999 og 2007 þar sem segir að kennsla í stærðfræði þurfi að efla rökfasta hugsun og einnig að efla hugkvæmni. Hún þurfi að laða fram gagnrýna og greinandi hugsun hjá nemandanum og einnig sjálfstraust, forvitni og löngun til að rannsaka og leita lausna á hinu óþekkta. Í beinu framhaldi segir:

> Stærðfræðikennsla í skólum á að endurspegla hinar fjölbreyttu ásýndir stærðfræðinnar. Hún er vísindi, list, tjáningarmiðill og tæki til að takast á við erfið úrlausnar-

> efni og hlutverk skólans er að sjá til þess að nemendur kynnist sem flestum hliðum hennar. (Menntamálaráðuneytið, 1999, bls. 10; 2007, bls. 7)

Árið 2000 setti danska menntamálaráðuneytið á fót tólf manna starfshóp undir formennsku Mogens Niss til að leita svara við tíu spurningum varðandi stærðfræðimenntun. Hópurinn skilaði af sér áliti með ítarlegri skýrslu sem var gefin út árið 2002 og ber heitið *Kompetencer og matematiklæring* (Niss og Højgaard Jensen, 2002). Í skýrslunni, sem vísað er til sem KOM-skýrslu, er stærðfræðileg hæfni flokkuð í undirstöðuþætti sem taldir eru mikilvægir fyrir stærðfræðinám og -kennslu á öllum skólastigum. Þessir hæfniþættir eru átta: Hugsanagangur, þrautalausnir, líkanasmíð, röksemdafærsla, framsetning, notkun táknmáls og formhyggja, tjáning, notkun hjálpartækja.

Í KOM-skýrslunni er lögð rík áhersla á að stærðfræðikennarar á öllum stigum séu vel hæfir í framangreindum undirstöðuþáttum og búi auk þess yfir hæfniauka í sjálfri stærðfræðinni miðað við það skólastig sem þeir kenna á. Þeir verða að geta gert sér grein fyrir hvernig stærðfræðinám hvers einstaks nemanda á sér stað, hvaða hæfni hann býr yfir, hver eru tök hans á greininni og hvaða hugmyndir hann hefur um hana (Niss og Højgaard Jensen, 2002). Slíkar kröfur til kennara byggjast vitaskuld á því að þeir sjálfir hafi sterk tök á greininni og hafi tamið sér að ígrunda viðfangsefni sín, kafa undir yfirborðið og spyrja sig faglegra spurninga.

Til að varpa ljósi á þá mælikvarða sem eru lagðir á starfshæfni stærðfræðikennara í Bandaríkjunum má nefna að kennari sem flytur milli fylkja þarf gjarnan að standast hæfnispróf í greininni til að fá full réttindi í nýja fylkinu. Slíku prófi er ætlað að meta þekkingu kennarans í ýmsum þáttum stærðfræðinnar og skilning hans á þeim kennsluaðferðum sem nauðsynlegar eru til að kenna þessa þætti. Svo dæmi sé tekið er viðmiðum fyrir stærðfræðikennara á unglingastigi (8.–12. bekk) í Texas skipt í opinberri skýrslu upp í sex svið: Talnahugtök, mynstur og algebru, rúmfræði og mælingar, líkindareikning og tölfræði, stærðfræðilegt ferli og stærðfræðilegt samhengi, kennsluaðferðir í stærðfræði og námsmat. Síðan er sviðunum skipt upp í hæfniþætti og þeir sundurgreindir eftir þeim markmiðum sem kennarinn á að hafa náð. Hæfniþættirnir eru á þriðja tug talsins og markmiðsþættirnir enn fleiri (Rice University, 2010; Texas Education Agency, 2010). Við val á stærðfræðiverkefnum í rannsókninni sem hér er til umfjöllunar voru meðal annars eftirfarandi fræðilegir hæfniþættir úr umræddri skýrslu notaðir sem viðmið.

- Kennarinn notar mynstur til að leysa dæmi og setja fram tilgátur.
- Kennarinn skilur fallhugtakið og eiginleika þess.
- Kennarinn skilur og leysir dæmi með aðferðum stærðfræðigreiningar.
- Kennarinn skilur evklíðska rúmfræði sem frumsendukerfi.
- Kennarinn skilur stærðfræðilega röksemdafærslu og þrautalausnaferli.

(Rice University, 2010)

Skipting stærðfræðinnar í fræðilega undirflokka er að mestu leyti stöðluð og tekur ekki breytingum eftir löndum eða fylkjum. Svo dæmi sé tekið er viðmiðum fyrir starfshæfni stærðfræðikennara í Kaliforníu skipt upp í eftirfarandi svið: Algebru, rúmfræði, talnafræði, líkindareikning og tölfræði, stærðfræðigreiningu, sögu stærðfræðinnar

(California Commission on Teacher Credentialing, 2010). Texas og Kalifornía eru hér nefnd ekki síst vegna þess að þau eru tvö fjölmennustu fylki Bandaríkjanna en einnig vegna þess að námskrár þeirra og viðmið eru stundum talin hafa afgerandi áhrif á námskrár annarra fylkja (sjá til dæmis Apple, 1993).

AÐFERÐ

Markmið rannsóknarinnar var að kanna hugtakaskilning og stærðfræðilega ígrundun þátttakenda til að leggja mat á það hvort undirbúningur í fræðilegri stærðfræði í kennaranámi tæki nægilegt mið af því að undirbúa nemendur undir að starfa af fagmennsku í anda hugsmíðahyggju. Til að ná þessum markmiðum var stefnt að því að fá svör við eftirfarandi spurningum:

1. Sýna kennaranemar nægilegan skilning á verkefninu til að gera sér grein fyrir hvaða ráðum megi beita til að takast á við það?
2. Sýna kennaranemar gagnrýna og greinandi hugsun í glímu við verkefnið?
3. Virðast kennaranemar ígrunda verkefni sem þeir fást við eða hafa leyst og freista þess að sjá það í víðara samhengi? Spyrja þeir sig spurninga?
4. Er auðvelt að beina kennaranemum, sem láta duga að leysa verkefni, inn á þá braut að ígrunda verkefnið frekar?

Í gagnrýninni og greinandi hugsun felst, að forsendur eru vegnar og metnar, röksemdafærslur ígrundaðar og niðurstöður vandlega endurskoðaðar. Beitt er athugulum hug á allar hliðar máls þegar unnið er að lausn viðfangsefnis. Leitað er eftir greinandi skilningi á viðfangsefninu með því að hluta það kerfisbundið niður, greina orsakasambönd, gera áætlun um lausn og vinna að henni skref fyrir skref.

Við val á framangreindum rannsóknarspurningum voru hæfniþættir KOM-skýrslunnar og TExES-viðmiðanna hafðir til hliðsjónar ásamt skilgreiningu Ragnhildar Bjarnadóttur á fjórum hliðum á starfshæfni kennara (Niss og Højgaard Jensen, 2002; Ragnhildur Bjarnadóttir, 2004; Texas Education Agency, 2010).

Þátttakendur og gögn

Þátttakendur í rannsókninni voru tólf nemendur í þriggja ára grunnnámi fyrir kennara á fyrsta tug þessarar aldar. Þessir nemendur voru allir á stærðfræðikjörsviði. Fyrir kjörsviðshópa voru lögð verkefni af fimm sviðum stærðfræðinnar og skyldu nemendurnir velta þeim fyrir sér, ræða þau og leysa eða reyna að leysa. Verkefnunum, A–E, verður lýst hér á eftir. Nemendum var kynnt að greinarhöfundar hygðust rannsaka hugtakaskilning og ígrundun. Þeir höfðu val um að taka þátt í að leysa verkefnin að undanskildu einu þeirra sem var hluti af lokaprófi. Eitt annað verkefni var hluti af námsmati þeirra sem völdu að glíma við það, annars var ekki um námsverkefni að ræða.

Greinarhöfundar söfnuðu munnlegum og skriflegum gögnum frá þátttakendum og ræddu við þá, einslega eða í hópum, um verkefnin sem þeir glímdu við. Munnlegum gögnum söfnuðu greinarhöfundar með því að taka nótur. Úr hópi þeirra sem reyndu við að minnsta kosti eitt verkefni voru þátttakendur valdir þannig að hver þeirra hefði glímt við að minnsta kosti tvö verkefni. Þannig fengust 25 úrlausnir og úr þeim völdu greinarhöfundar 17 úrlausnir sem þeir telja dæmigerðar. Þessum 17 úrlausnum 12 nema eru gerð stutt skil í greininni. Engin úrlausn sem er undanskilin umfjöllun hefði breytt niðurstöðum rannsóknarinnar. Í einu tilfelli, verkefni D, var eingöngu um skriflegar úrlausnir nemenda að ræða; í öðru tilfelli, verkefni B, aðallega munnleg gögn sem aflað var með því að ræða við nemendur og leggja fyrir þá (opnar) spurningar. Í verkefnum A, C og E voru gögnin blanda af þessu tvennu. Hluti spurninga greinarhöfunda var fyrirfram ákveðinn en aðrar spurningar réðust af umræðunni.

Greining og úrvinnsla

Við greiningu gagna var leitað svara við framangreindum rannsóknarspurningum. Verkefnin eru ólík og það fer eftir eðli hvers um sig hverjar af spurningunum eiga best við. Gögn voru að hluta til metin samhliða gagnaöfluninni, einkum munnleg gögn. Báðir greinarhöfundar hafa áralanga reynslu af prófdómarastörfum á munnlegu stúdentsprófi í stærðfræði og voru sammála um mikilvægi munnlegs matsþáttar í rannsókninni. Eins og fram hefur komið hafði verkefni D þá sérstöðu að vera hluti af skriflegu prófi og þar var ekki um munnleg gögn að ræða. Í því tilfelli var greining gagnanna einskorðuð við rannsóknarspurningar 1 og 2. Greinarhöfundar skiptu með sér verkum þegar kom að því að leggja önnur verkefni fyrir og stýra umræðu um þau. Þeir unnu síðan sameiginlega að mati á öllum gögnum miðað við hverja rannsóknarspurningu fyrir sig.

Viðfangsefnin og val þeirra

Við val á þeim viðfangsefnum sem nemendur glímdu við tóku greinarhöfundar mið af því að flest skyldu þau tengjast stærðfræðisviðum sem kennsla í grunnskóla nær til. Þetta á við um verkefni A, C, D og E. Einnig voru framangreindir fræðilegir hæfniþættir TExES-viðmiðanna hafðir til hliðsjónar. Hliðstæða hæfniþætti er að finna í KOM-skýrslunni þar sem fjallað er um hæfni stærðfræðikennara í hinum faglegu þáttum kennslunnar. Þar segir meðal annars að gera þurfi ráð fyrir að kennarar hafi nauðsynlega hæfni til stærðfræðilegrar hugsunar, þrautalausna, líkanagerðar, röksemdafærslu og notkunar hjálpartækja og að á öllum sviðum búi þeir yfir hæfniauka miðað við það skólastig sem þeir kenna á (Niss og Højgaard Jensen, 2002). Verkefnin skyldu valin þannig að ekki lægi í augum uppi hvernig mætti leysa þau, til dæmis með þekktri lausnaraðferð, heldur myndi reyna á hugtakaskilning og stærðfræðilega ígrundun þátttakenda. Þá skyldu verkefnin vera þannig að þau gætu talist fulltrúar fyrir mikilvæg verkefni sem kennarar kjósa og hafa kosið að leggja fyrir nemendur sína, jafnvel öldum saman. Viðfangsefnin sem nemendur glímdu við fylgja hér á eftir. Verður nú farið nokkrum orðum um hvert þessara verkefna.

A. Þraut um óþekktan arf Indverji lætur börnum sínum eftir í arf allmarga demanta, alla jafn verðmæta. Í erfðaskrá hans var svo mælt fyrir að elsta barnið skyldi fá einn demant og 1/7 afgangsins, næstelsta barnið 2 demanta og 1/7 þess er þá var eftir, og þannig skyldi halda áfram að skipta. Við skiptin kom í ljós að börnin fengu jafnt. Hve mörg voru börnin og hve margir voru demantarnir?

B. Þverstæða Zenóns um Akkilles Akkilles þreytir kapphlaup við skjaldböku. Hraði hans er tífaldur hraði skjaldbökunnar en hann gefur henni tíu feta forskot. Þegar Akkilles hefur hlaupið þessi tíu fet hefur skjaldbakan komist eitt fet í viðbót og þegar Akkilles hefur hlaupið það fet er hin viðsjála skjaldbaka komin einn tíunda úr feti til viðbótar fram á veginn og svo koll af kolli. Akkilles nær því skjaldbökunni aldrei – eða hvað?

C. Talnarunur Hér var hin vel þekkta Fibonacci-talnaruna: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . , lögð til grundvallar og þeirri spurningu beint til kennaranema hversu einstök hún sé í raun og veru. Fibonacci-talnarunan er skilgreind út frá fyrstu tveimur tölunum og spurt var meðal annars hvað myndi breytast ef byrjað væri með aðrar tölur.

D. Hugtakaskilningur í algebru Hér var sjónum beint að hugtaki úr línulegri algebru. Hugtakið var kjarni línulegrar vörpunar og því höfðu nemendur kynnst í kennaranámi sínu. Skilningur á hugtakinu sjálfu var kannaður sem og beiting þess í stærðfræðilegri röksemdafærslu.

E. Hugtakaskilningur í rúmfræði – teikniforrit Hér var sjónum beint að hugtakinu hæð í þríhyrningi og hvort og þá hvernig mætti útvíkka það yfir í hæð í marghyrningi almennt. Einnig var komið inn á hvort nota mætti teikniforrit til sönnunar í rúmfræði.

Verkefni A – Þraut um óþekktan arf

Þrautin um óþekktan arf er ein af fjölmörgum stærðfræðiþrautum sem varðveist hafa öldum saman. Hún hefur skotið upp kollinum í óteljandi kennslubókum frá því að hún birtist fyrst í reikningsbókinni *Liber Abaci* eftir Fibonacci sem út kom snemma á þrettándu öld. Þrautin getur talist dæmigerð fyrir fjölmargar sígildar stærðfræðiþrautir sem eiga það sameiginlegt að mun meiri stærðfræði býr undir en virst gæti í fljótu bragði. Slíkar þrautir leyna á sér og eftir því sem dýpra er kafað í þær kemur meiri stærðfræði fram. Algengast er að sjá þrautina um arf setta fram, eins og hér er gert, þannig að hlutfallið af eftirstöðvunum sem börnin fá sé 1/7 en oft er líka talað um 1/10 og alls ekki er nauðsynlegt að velja annað hvort þessara hlutfalla. Það eitt að gera sér grein fyrir þessu kostar ígrundun og ber vott um dýpri skilning á þrautinni en nauðsynlegur er til þess eins að leysa hana eins og hún er sett fram í kennslubókum. Fyrir utan að vera sögulega mikilvæg og fela í sér áhugaverða stærðfræði hefur þrautin um óþekktan arf þann góða kost að lausn hennar kemur skemmtilega á óvart. Lausnir nemenda á þrautinni eru vel til þess fallnar að verða skoðaðar í ljósi líkans Pólya fyrir þrautalausnaferli.

Verkefni B – Þverstæða Zenóns um Akkilles

Þverstæðan um Akkiles er ein af nokkrum þverstæðum sem kenndar eru við Zenón, grískan heimspeking sem var uppi á fimmtu öld fyrir Krist. Þverstæðan um Akkilles er þeirra frægust og í henni kallar Zenón til leiks Akkilles sem var mestur kappi í liði Grikkja í stríðinu um Trójuborg. Skilningur á þverstæðunni felst í rauninni í því að viðurkenna að stærðfræðilega sé unnt að líta á endanlega vegalengd sem summu óendanlega margra eiginlegra hluta sinna. Nýti maður sér upplýsingarnar um 10 feta forskot skjaldbökunnar og það að hraði Akkillesar er tífaldur hraði hennar lítur dæmið svona út: Akkilles leggur af stað þegar skjaldbakan er komin 10 fet fram á veginn. Þegar Akkilles hefur hlaupið þessi tíu fet hefur skjaldbakan komist áfram eitt fet í viðbót. Þegar Akkilles hefur hlaupið það fet er skjaldbakan komin 1/10 úr feti til viðbótar fram á veginn og svo koll af kolli. Vegalengdin sem skjaldbakan fer áður en Akkilles nær henni, mæld í fetum, er því: $10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \ldots$

Þessa óendanlegu summu má reikna út sem markgildi með aðferðum örsmæðareiknings og útkoman er endanleg stærð: 100/9. Akkilles nær skjaldbökunni góðu þegar þau hafa lagt að baki 100/9 fet. Þverstæða Zenóns er eitt af fjölmörgum viðfangsefnum sem nota hefði mátt til að kanna skilning þátttakenda á sviði stærðfræðigreiningar og í því skyni var hún meðal annars valin.

Verkefni C – Talnarunur

Líkanasmíð er mjög mikilvægur þáttur í stærðfræðinámi, svo og það að nota mynstur til að leysa dæmi og setja fram tilgátur. Snar þáttur í þessu er greining á talnarunum. Eftirfarandi talnaruna: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . þar sem fyrstu tvær tölurnar eru 1 og 1 en hver liður rununnar þar á eftir er summa tveggja næstu liða á undan kallast Fibonacci-runa. Hún er kennd við áðurnefndan Fibonacci og birtist í reikningsbók hans *Liber Abaci*. Runan segir til um hve mörg kanínupör eru til staðar á hverjum tíma. Í upphafi er eitt par, sem frá og með næsta mánuði eignast eitt kanínupar í hverjum mánuði sem sjálft eignast eftir mánuð nýtt kanínupar í hverjum mánuði og svo koll af kolli án þess að nokkru sinni drepist kanína. Þessa talnarunu og kanínusögu hefur mátt finna í stærðfræðikennslubókum öldum saman, og er þá jafnan rætt um hvernig runan tengist hlutfallinu „gullinsniði“ og ýmsum fyrirbrigðum í náttúrunni. Runan er góðkunningi allra kennara og að mati greinarhöfunda kjörinn fulltrúi fyrir verkefni sem skyldi snúast um líkanasmíð og mynstur.

Verkefni D – Hugtakaskilningur í algebru

Í hreinni (e. abstract) algebru er mikið af óhlutbundnum hugtökum sem geta reynst nemendum erfið í byrjun. Verkefnið snerist um línulega vörpun milli tveggja línulegra rúma og kjarna vörpunarinnar. Það fólst í að setja fram skilgreiningu á kjarnahugtakinu og útskýra hvernig kjarni línulegrar vörpunar tengist því hvort vörpunin sé eintæk (varpi engum tveimur stökum á sama stak). Þess ber að geta að nemendurnir voru að ljúka námskeiði í línulegri algebru á stærðfræðikjörsviði og þar hafði verið farið í þessi atriði. Hugtakið fall gengur eins og rauður þráður gegnum öll svið stærðfræðinnar og í línulegri algebru eru línulegar varpanir þau föll sem skipta máli. Vegna mikilvægis fallhugtaksins ákváðu greinarhöfundar að eitt verkefnið skyldi snúast um fall og eiginleika þess og það varð úr að verkefnið skyldi vera á sviði línulegrar algebru.

Verkefni E – Hugtakaskilningur í rúmfræði – teikniforrit

Sígild rúmfræði er kennd við Grikkjann Evklíð sem var uppi um 300 f. Kr. Hún er sú grein stærðfræðinnar sem þykir sýna á gleggstan hátt uppbyggingu frumsendukerfis. Orðið frumsenda (e. axiom) merkir undirstöðulögmál og grunnurinn sem sígild rúmfræði í plani hvílir á eru fimm frumsendur kenndar við Evklíð auk frumhugtaka og svokallaðra almennra staðreynda. Frumsendur eru ekki sannaðar heldur álitnar sannar og frumhugtök eru ekki skilgreind. Síðan byggist frumsendukerfið upp með því að skilgreind eru ný hugtök og settar fram setningar um þau sem eru sannaðar. Hvergi í stærðfræðinámi kennaranema ætti mikilvægi hugtaka og krafan um nákvæmni í skilgreiningu þeirra að vera ljósari en einmitt í sígildri rúmfræði. Sama má segja um mikilvægi sannana á setningum. Hvaða kunnugt hugtak úr evklíðskri rúmfræði var valið til umfjöllunar í þessu verkefni skipti ekki höfuðmáli en hugtakið hæð hentaði að vísu vel í tengslum við teikningar í tölvu og vangaveltur um hvort nota mætti teikniforrit til sönnunar í rúmfræði.

ÚRLAUSNIR

Í kaflanum er gerð stutt grein fyrir úrlausnum þátttakenda og gefin sýnishorn af svörum þeirra.

Verkefni A – Þraut um óþekktan arf

Gerð er grein fyrir úrlausnum þriggja kennaranema. Allir sem einn réðust þeir í að leysa þrautina sem kann að stafa af því að nemendur hafa vanist því í skóla að þau viðfangsefni í stærðfræði sem þeim eru fengin séu leysanleg. Einn nemendanna fann lausn með því að prófa sig áfram, hinir tveir reiknuðu út lausn. Rannsakanda reyndist auðvelt að fá þá til að ígrunda verkefnið frekar. Þeir voru meðal annars beðnir að velta því fyrir sér hvort nemendur í 10. bekk kynnu að telja upplýsingar vanta til þess að dæmið væri leysanlegt. Einn þátttakandi svaraði á þessa lund:

> Mér finnst mjög líklegt að nemendur haldi að upplýsingar vanti. Einhver gæti sagt sem svo að ekki gætu verið fleiri börn en sjö og reynt að leysa þrautina út frá því.

Annar svaraði þannig:

> Kem hér með tillögur að líklegum svörum [nemenda í 10. bekk]: Ekki hægt að leysa þetta. Það vantar upplýsingar um hvað börnin eru mörg. Það vantar upplýsingar um hvað demantarnir eru margir.

Einn þátttakandi taldi aðspurður að um fleiri en eina lausn á dæminu gæti verið að ræða en rökstuddi þá skoðun ekki. Hinir tveir töldu að lausnin væri ótvíræð en einungis annar færði rök fyrir svarinu. Aðspurðir hvort það skipti máli að talan 7, sem kemur fyrir í dæminu, sé frumtala eða hvort setja mætti aðra frumtölu eða jafnvel samsetta tölu í stað tölunnar 7, sögðu allir þrír nemendurnir að í stað 7 gæti komið hvaða tala sem er, einn þeirra gaf engan rökstuðning en hinir tveir gáfu áhugaverðan rökstuðning, annar eftir að skoða tiltekin dæmi um aðrar tölur en 7 og hinn með því að sýna útreikninga.

Allir sýndu þátttakendur greinandi hugsun sem leiddi til ályktana. Dæmi um þetta:

> Það má draga þá ályktun að demantafjöldinn sé ferningstala. Það væri hægt að semja dæmið þannig að önnur ferningstala væri fjöldi demanta. Dæmið er leysanlegt fyrir hvaða ferningstölu sem er. Ef fjöldi barna er x, þá er fjöldi demanta $x \cdot x$ og hluti afgangs sem fyrsta barn fær er $1/x + 1$.

Vangaveltur voru fleiri, meðal annars um gildi upplýsinga í þrautalausnum og gildi þess að prófa sig áfram í leit að lausn.

Verkefni B – Þverstæða Zenóns um Akkilles

Gerð er stutt grein fyrir úrlausnum fjögurra kennaranema. Hvar viðfangsefnið ætti heima innan stærðfræðinnar gátu þeir ekki fest fingur á, en voru allir sammála um að þetta myndi teljast þraut. Enginn þeirra gerði sér grein fyrir hvaða aðferðum væri best að beita til að takast á við verkefnið. Allir þessir nemendur höfðu kynnst undirstöðuatriðum örsmæðareiknings í framhaldsskóla, þar með talið hugtakinu markgildi. Þeir áttu hins vegar eftir að taka námskeiðið Stærðfræðigreining í kennaranámi sínu þar sem farið er dýpra í sömu hluti. Nemendurnir voru mjög áhugasamir um verkefnið og fljótir að segjast skilja útskýringu rannsakanda á viðfangsefninu sem var sú sama og gefin er hér að framan. Lausnin á þverstæðunni um Akkilles felst í því að nýta hugtök og setningar örsmæðareiknings til að líta á endanlega vegalengd sem summu óendanlega margra eiginlegra hluta sinna. Nemendur voru beðnir um að ígrunda hvort það sé trúlegt að summa óendanlega margra jákvæðra liða geti verið endanleg stærð (sífellt bætist meira við – æ fleiri liðir) og runnu þá tvær grímur á suma: „Mér finnst það nú skrýtið en auðvitað nær hann henni."

Þau stærðfræðihugtök sem hér koma við sögu, örsmæð, óendanleg summa og markgildi, eru nokkuð flókin. Eftir að hafa rifjað upp eðlisfræðiformúluna $h \cdot t = v$ um sambandið milli hraða, tíma og vegalengdar, tókst þátttakendum í sameiningu að reikna út sömu niðurstöðu og fæst með aðferðum stærðfræðigreiningar. Með tilstyrk eðlisfræðinnar sýndu þeir sem sagt fram á að skjaldbakan fer 100/9 fet (og þá nær Akkilles henni).

Verkefni C – Talnarunur

Gerð er grein fyrir úrlausnum þriggja kennaranema. Þeirri spurningu var fyrst beint til nemendanna hversu einstök Fibonacci-runan sé, til dæmis hvað myndi breytast ef byrjað væri með aðrar tölur en 1 og 1. Segja má að þeir hafi svarað spurningunni án þess að reyndi á gagnrýna og greinandi hugsun því þeir þekktu það greinilega allir að allt eins mætti byrja rununa á tölunum 0 og 1 og að þá fengist Fibonacci-runan frá og með tölu númer tvö. Eftir stuttar umræður smíðuðu nemarnir síðan nýjar runur samkvæmt aðferð Fibonaccis: Völdu tvær nýjar upphafstölur og lögðu síðan saman koll af kolli. Þeir ýmist byrjuðu með tvær ólíkar tölur eða tvisvar sömu töluna og engum datt í hug að nota neikvæða(r) tölu(r). Í engri runu var fyrri upphafstalan minni en seinni upphafstalan. Sýnishorn af nýjum runum nemenda:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, …
5, 7, 12, 19, 31, 50, …
10, 20, 30, 50, 80, 130, …

Tveir nemendanna bentu á að nýju runurnar þeirra endurspegluðu ekki kanínutímgunina og var það eina viðleitnin til að bera eiginleika nýju runanna saman við eiginleika Fibonacci-rununnar. Enginn velti á þessu stigi fyrir sér tengingunni við gullinsnið. Eftir ábendingu rannsakanda reiknuðu nemendurnir út hlutföll samliggjandi talna í hinum nýju runum sínum og komust þá að þeirri niðurstöðu að eftir því sem þeir komu ofar í runurnar nálgaðist þetta hlutfall töluna 1,618…

Rétt eins og hjá Fibonacci-rununni nálgaðist hlutfallið gullinsnið sem er talan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Þegar hér var komið sögu fór ekki á milli mála að forvitni nemendanna var vakin og þeir virtust spyrja sig spurningarinnar: „Hvernig má þetta vera?“ Enginn þeirra sýndi tilburði til að reyna að finna svar við þeirri spurningu en tilgáta var í burðarliðnum sem nemendur settu fram í sameiningu:

> Ef byrjað er með tvær tölur og síðan bætt við tölum í sífellu með því að leggja saman tvær næstu tölurnar á undan þá fæst talnaruna sem hefur þann eiginleika Fibonacci-rununnar að hlutföll tveggja talna í röð stefna á gullinsnið.

Sönnun tilgátunnar felst í að reikna út markgildi með aðferðum stærðfræðigreiningar og rannsakandi hjálpaði nemendum af stað og studdi þá í þeirri vinnu. Ekki er ástæða til að rekja gang sönnunarinnar en geta má þess að ef markgildið er kallað x kemur fram jafna á forminu $x = 1 + 1/x$ sem hefur í för með sér jöfnuna $x^2 - x - 1 = 0$ og jákvæð lausn þessarar annars stigs jöfnu er einmitt gullinsnið: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Verkefni D – Hugtakaskilningur í algebru

Gerð er grein fyrir úrlausnum þriggja kennaranema sem glímdu við verkefnið á lokaprófi. Í prófspurningunni var fyrst rifjað upp að ef T er línuleg vörpun varpar hún núlli í núll. Þá voru nemendur beðnir að skilgreina hugtakið kjarni línulegrar vörpunar T og síðan útskýra hvernig kjarninn tengdist því hvort T væri eintæk vörpun.

Einn þátttakandi skilgreindi hugtakið rétt, það er að segja að kjarninn væri mengi (safn) allra þeirra staka sem T varpaði á 0. Annar þátttakandi sleppti því að reyna við skilgreininguna en svar þess þriðja var á þessa lund: „kerT er (núll) 0. Þeir vektorar sem varpast alltaf á sjálfan sig."

Sami nemandi og skilgreindi hugtakið rétt gerði góða grein fyrir því að T væri eintæk vörpun þá og því aðeins að eina stakið í kjarnanum væri 0. Hinum tveimur tókst ekki vel upp en þeir reyndu samt spreyta sig á röksemdafærslunni um tengsl kjarnans við það að vörpunin sé eintæk. Án skilnings á lykilhugtakinu kjarni verður sú röksemdafærsla þó varla byggð. Annar nemendanna svaraði þannig: „Ef $0 \in \mathrm{Ker}(T)$ þá er aðeins til ein lausn svo $\ker(T) = \{0\}$ svo hún hlýtur að vera eintæk."

Línuleg vörpun er sérstök gerð falls og á öllum sviðum stærðfræðinnar leika föll stórt hlutverk. Skilningur á fallhugtakinu og eiginleikum þess er í raun forsenda fyrir skilningi á ýmsum óhlutbundnum hugtökum, eins og til dæmis kjarna línulegrar vörpunar. Óhlutbundin hugtök í algebru reynast nemendum erfið og geta má þess að settar hafa verið fram kenningar um hvernig stærðfræðinemar í grunnnámi í háskóla leitast við að draga úr stigi hlutfirðingar slíkra hugtaka (Hazzan, 1999).

Verkefni E – Hugtakaskilningur í rúmfræði – teikniforrit

Gerð er grein fyrir úrlausnum fjögurra kennaranema sem glímdu við þetta verkefni. Nemendur þekktu hugtakið hæð í þríhyrningi, vissu að þær væru þrjár og allir teiknuðu þeir rétta mynd af hæð. Þeir áttu hins vegar í erfiðleikum með að setja fram nákvæma skilgreiningu á hugtakinu og aðeins einn þessara nemenda nefndi að hæð væri línustrik en það er ómissandi hluti af skilgreiningunni. Dæmi um svör nemenda:

> Hæð í þríhyrningi myndar rétt horn á mótlæga hlið topppunktsins.
>
> Hæð segir til um hæð þríhyrningsins, hæðin verður að koma hornrétt á línur þríhyrningsins.
>
> Ef ég hugsa um hæð í þríhyrningi sé ég fyrir mér línu sem fer frá lengstu grunnlínu í andstæðan topppunkt (hornrétt eða stystu leið).

Þegar kom að því að útvíkka hugtakið og teikna hæð í samsíðungi voru allir nema einn nemendanna með rétta mynd og líka rétt svar við því hve hæðirnar í samsíðungi væru margar úr hverjum hornpunkti. Næst átti að alhæfa yfir í hugtakið hæð í marghyrningi almennt og þá voru tveir af þessum fjórum nemendum með rétt svar við því hve margar hæðir væri hægt að draga úr hverjum hornpunkti í n-hyrningi. Hinum tókst ekki að sjá hugtakið hæð í víðara samhengi en þeir áttu að venjast.

Að lokum voru nemendur beðnir að velta því fyrir sér hvort þeir teldu að unnt væri að nota teikniforrit til að sanna stærðfræðisetninguna sem segir að hæðirnar í þríhyrningi skerist í einum punkti. Setninguna þekktu nemendur vel og þeir höfðu unnið með teikniforrit sem gerði þeim kleift að draga til og breyta lögun mynda. Þeir vissu að hvernig sem þeir drægju til teiknaðan þríhyrning með hæðum sínum myndu hæðirnar á myndinni halda áfram að skerast. Nemendurnir töldu allir ranglega að forritið mætti nota til að sanna setninguna. Þeim yfirsást að óháð því hve lengi þeir draga þríhyrninginn til og umbreyta honum ná þeir ekki að skoða alla þríhyrninga. Dæmi um svör nemenda:

> Já, hægt er að draga myndina óendanlega mikið til og það er nóg að draga einn punkt.
>
> Þú „sérð" hvað gerist við flutning á punkti. Þú getur flutt punktana í allar mögulegar stöður í forritinu og ef þú getur *ekki* sett punktana á þá staði þar sem niðurstaðan væri sú að hæðirnar væru ekki sampunkta er komin sönnun fyrir því að hæðirnar eru alltaf sampunkta.

Enginn virtist gera sér grein fyrir að teikniforrit í tölvu standa sjálfri stærðfræðinni að baki þegar kemur að sönnunum. Teikniforrit geta gefið vísbendingar og stutt notanda sinn við tilgátusmíð sem er ekki það sama og að sanna almennar stærðfræðisetningar.

NIÐURSTÖÐUR OG UMRÆÐA

Markmið rannsóknarinnar var að kanna hugtakaskilning og stærðfræðilega ígrundun þátttakenda til að leggja mat á það hvort undirbúningur í fræðilegri stærðfræði í kennaranámi taki nægilegt mið af því að undirbúa nemendur undir að starfa af fagmennsku í anda hugsmíðahyggju. Til að ná þessu markmiði voru settar fram fjórar rannsóknarspurningar. Í þessum kafla eru úrlausnir þátttakenda á framangreindum verkefnum notaðar til að leita svara við hverri spurningu um sig.

1. Sýna kennaranemar nægilegan skilning á verkefninu til að gera sér grein fyrir hvaða ráðum megi beita til að takast á við það?

Svarið við þessari spurningu er jákvætt fyrir öll verkefnin nema verkefni B, þverstæðu Zenóns um Akkilles.

2. Sýna kennaranemar gagnrýna og greinandi hugsun í glímu við verkefnið?

Eins og áður er sagt felst það í gagnrýninni og greinandi hugsun að forsendur eru vegnar og metnar, röksemdafærslur ígrundaðar og niðurstöður vandlega endurskoðaðar. Beitt er athugulum hug á allar hliðar máls þegar unnið er að lausn viðfangsefnis. Leitað er eftir greinandi skilningi á viðfangsefninu með því að hluta það kerfisbundið niður, greina orsakasambönd, gera áætlun um lausn og vinna að henni skref fyrir skref.

Í engu verkefni komu fram að fyrra bragði efasemdir þátttakenda um að nægar forsendur væru gefnar til að verkefnið væri leysanlegt né heldur vangaveltur um hvort óþarfar forsendur væru gefnar. Umræður um það hvort lausnir kynnu að vera fleiri en ein í verkefni A spunnust út frá spurningu greinarhöfundar. Allir þátttakendur sem glímdu við verkefni A sýndu greinandi hugsun sem leiddi til ályktana eins og að framan er getið. Í verkefni B, sem var óneitanlega mest framandi fyrir nemendur, eru niðurstöður að mestu byggðar á samræðum við nemendur og í svörum við opnum spurningum greinarhöfundar kom fram gagnrýnin og greinandi hugsun. Í verkefni

C smíðuðu þátttakendur talnarunur, eftir ábendingu greinarhöfundar, og greindu eiginleika þeirra (eða skort á eiginleikum) ýmist sjálfir eða í framhaldi af spurningu greinarhöfundar. Fyrir utan skilgreiningu á hugtaki í verkefni D reyndi á að greina orsakasamhengi milli þess og annars hugtaks. Einn þriggja þátttakenda leysti báða þætti og lausn hans gaf ótvírætt jákvætt svar við spurningu um gagnrýna og greinandi hugsun. Verkefni E snerist um hugtakaskilning og sannanir í rúmfræði. Þátttakendur áttu í erfiðleikum með að setja fram nákvæma skilgreiningu á hugtaki sem þeir höfðu unnið með í rúmfræði. Segja má að hér hafi ekki tekist nægilega vel til í kennslu námskeiðsins hvað varðar að laða fram greinandi hugsun nemendanna um dæmigert rúmfræðihugtak. Loks var greining þátttakenda á mætti teikniforrita til að sanna stærðfræðisetningar röng.

3. Virðast kennaranemar ígrunda verkefni sem þeir fást við eða hafa leyst og freista þess að sjá það í víðara samhengi? Spyrja þeir sig spurninga?

Í engu tilfelli kom fram að þátttakendur spyrðu sig spurninga að fyrra bragði eða reyndu að sjá verkefni í víðara samhengi en það var sett fram.

4. Er auðvelt að beina kennaranemum, sem láta duga að leysa verkefni, inn á þá braut að ígrunda verkefnið frekar?

Í öllum tilfellum sem á reyndi var svarið við þessari spurningu já.

Niðurstöður benda til þess að nokkuð vanti upp á að undirbúningur kennaranema í fræðilegri stærðfræði sé nægilega traustur. Þeir þyrftu að hafa dýpri hugtakaskilning og spurulli og betur greinandi hug. Hæfnina til að ígrunda þyrfti að styrkja í kennaranámi þeirra og það stendur upp á kennsluna á stærðfræðikjörsviði að gera það. Það skiptir sköpum að láta kennaranema temja sér að kafa dýpra í verkefni en svo að nægi til að leysa þau. Þetta er nátengt framangreindum fjórum flokkum markmiða í stærðfræði sem fjalla um aðferðir og námskráin frá 1999 getur um. Þar segir:

> Lögð er áhersla á að hægt sé að þjálfa leikni í að takast á við viðfangsefni þar sem lausnir liggja ekki í augum uppi. Sú leikni er samofin öðrum þáttum. Leit að lausnum krefst bæði hugkvæmni og rökvísi og færni í notkun tungumálsins eykur rökvísi. (Menntamálaráðuneytið, 1999, bls. 7)

Í dönsku KOM-skýrslunni eru tilgreindir átta hæfniþættir sem taldir eru mikilvægir fyrir stærðfræðinám og -kennslu á öllum skólastigum. Þessir þættir verða ekki aðgreindir heldur tvinnast saman en segja má að niðurstaða rannsóknarinnar bendi til þess að þættirnir hugsanagangur, þrautalausnir, röksemdafærsla og framsetning séu hlekkir sem þyrfti að styrkja hjá flestum þátttakendum. Hvað varðar framangreint líkan Pólya fyrir þrautalausnaferli liggur beinast við að beina sjónum að niðurstöðum úr verkefni A, þrautinni um óþekktan arf, og verkefni B, þverstæðu Zenóns um Akkilles, og hér skiptir í tvö horn: Nemendur náðu sæmilegum tökum á fyrra verkefninu en litlum á því síðara. Í fyrra verkefninu steig enginn síðasta Pólya-skrefið af fjórum: Að líta til baka.

Áður hefur verið minnst á fræðilega hæfniþætti úr viðmiðum fyrir stærðfræðikennara á unglingastigi í Bandaríkjunum sem greinarhöfundar notuðu ásamt öðrum viðmiðum við val á þeim stærðfræðiverkefnum sem eru til umræðu í þessari grein.

Nánari útlistanir á hverjum hæfniþætti bandarísku viðmiðanna eru settar fram sem markmið og listinn hér að neðan gefur sýnishorn af markmiðum sem tengjast títtnefndum stærðfræðiverkefnum greinarinnar. Þar segir um kennarann að hann skuli:

- Greina eiginleika runu (til dæmis Fibonacci-runu).
- Geta fundið formengi og varpmengi falls.
- Geta skorið úr um hvort fall sé eintækt og/eða átækt og fundið andhverfu falls.
- Skilja markgildishugtakið og hvernig það tengist samfelldni falls.
- Skilja frumsendukerfi og hugtök því tengd (frumhugtök, skilgreind hugtök ….)
- Beita eiginleikum samsíða og hornréttra lína við þrautalausnir.
- Sýna skilning á því að nota tölvuforrit í rúmfræði.
- Skilja þrautalausnaferlið.

(Rice University, 2010)

Með tilliti til þessara markmiða er niðurstaða könnunarinnar óbreytt. Stærðfræðileg ígrundun og hugtakaskilningur kennaranema við úrlausn á verkefnunum er veikur hlekkur. Undirbúningur sem þeir fá í fræðilegri stærðfræði í kennaranámi þyrfti að styrkja þessa þætti.

Stærðfræðilegur undirbúningur kennaranema úr framhaldsskóla er að jafnaði ekki mikill. Meirihluti þeirra er með stúdentspróf af mála- eða félagsfræðibraut og hefur að meðaltali lokið innan við þrettán einingum í stærðfræði (Freyja Hreinsdóttir og Friðrik Diego, 2009). Til samanburðar má geta þess að í eftirtöldum deildum Háskóla Íslands er ýmist gerð krafa um eða eindregið mælt með að umsækjendur um grunnnám hafi lokið 21 einingu í stærðfræði á stúdentsprófi: Jarðvísindadeild, Líf- og umhverfisvísindadeild, Raunvísindadeild. Fyrst engin slík krafa er gerð til umsækjenda um grunnnám í Kennaradeild hlýtur sú spurning að vakna hvort nemendur á stærðfræðikjörsviði í kennaranámi þyrftu ekki einfaldlega að fá meiri undirbúning í fræðilegri stærðfræði á kjörsviðinu. Þetta væri í samræmi við þá niðurstöðu í framangreindri rannsókn Ragnhildar Bjarnadóttur að aðeins 22% kennaranema töldu kennaranámið hafa stutt vel við sig varðandi þekkingu sem tengdist skólanámsgreinum og 65% nemanna töldu að áherslan á þessa þætti hefði átt að vera meiri (Ragnhildur Bjarnadóttir, 2005). Hugtakaskilningur í stærðfræði styrkist með auknu fræðilegu námi og í háskólanámi í stærðfræði er ígrundun á hugtökum og því fræðilega samhengi sem þau eru í ómissandi þáttur. Það að ígrunda og beita spurulum hug lærist og verður sjálfsagður og eðlilegur hlutur þegar fram í sækir í stærðfræðinámi.

LOKAORÐ

Vert er að huga að því hvort ekki sé rétt að innleiða sérstakt skyldunámskeið í þrautalausnum á stærðfræðikjörsviði í kennaranámi. Það hefur færst í vöxt og er talið gefa góða raun að byrja á þessum þætti í grunnnámskeiðum í stærðfræði fyrir almenna kennaranema (Long og DeTemple, 2006). Framangreint valnámskeið, Þrautagleði, í kennaranámi í Háskóla Íslands hefur sýnt sig að eiga fullt erindi inn á stærðfræðikjörsviðið. Báðir greinarhöfundar hafa komið að undirbúningi framhaldsskólanema fyrir þátttöku í Ólympíuleikum í stærðfræði og þar sýnir sig svo ekki verður um villst að unnt er að rækta með góðum árangri þann þátt að ígrunda stærðfræðileg viðfangsefni og brjóta þau til mergjar.

Það er sama hvar borið er niður, allir sem fjalla um stærðfræðinám og -kennslu leggja áherslu á mikilvægi skilnings. Í skýrslunni *Markmið stærðfræðikennslu í grunnskólum og framhaldsskólum* sem unnin var á vegum menntamálaráðuneytisins undir formennsku Reynis Axelssonar í tengslum við endurskoðun aðalnámskrár á árunum 1996–1998 segir að varla sé efamál að undirstaða allrar stærðfræðikunnáttu sé skilningur á tölum og talnareikningi ásamt færni í notkun talna. Talin eru upp mörg efnisatriði þessu tengd sem nemendur eiga að hafa öðlast dágóðan skilning á við lok grunnskóla og síðan segir:

> Slík upptalning efnisatriða segir þó ekki hálfa söguna. Við viljum leggja áherslu á að það er *skilningur* á þessum hugtökum sem mestu máli skiptir. Nákvæmlega hvað það þýðir að skilja stærðfræðihugtak væri efni í langa heimspekilega umræðu, og niðurstöður hennar geta verið mikilvægar fyrir hugmyndir okkar um hvernig kenna skuli stærðfræði. (Menntamálaráðuneytið, 1998, bls. 7)

Niðurstöður rannsóknarinnar benda til þess að kennaranemarnir sjálfir, sem stærðfræðinemar, búi ekki að öllu leyti yfir þeirri hæfni sem kenningar um hugsmíðahyggju leggja áherslu á og þeim er ætlað að ná fram hjá nemendum sínum. Í námi þeirra á neðri skólastigum virðist hæfniþáttur á borð við þann að brjóta hugtök til mergjar ekki hafa verið nægilega örvaður. Auk þess virðist sem nám þeirra á stærðfræðikjörsviði kennaranáms hafi ekki skilað tilætluðum árangri hvað þetta varðar. Misbrestur er á að hugtök sem lögð hefur verið áhersla á í fræðilegum námskeiðum á sviðinu skili sér nægilega vel. Dæmi um þetta eru hugtökin kjarni í línulegri algebru og hæð í rúmfræði sem verkefni D og E snerust um. Efla þarf menntun verðandi stærðfræðikennara þannig að hún nái að styrkja þá í þeim mikilvægu þáttum að temja sér að ígrunda viðfangsefni sín, brjóta hugtök til mergjar, kafa undir yfirborðið og spyrja sig faglegra spurninga. Mikið er í húfi enda hlýtur markmiðið með kennslu á stærðfræðikjörsviði í kennaranámi að vera að búa kennaranema undir að axla af fullri fagmennsku hlutverk stærðfræðikennara hvort sem hann hyggst starfa í anda hugsmíðahyggju eða ekki. Fagmennska kennara verður ekki skilin frá hæfni hans.

Niðurstöður rannsóknarinnar draga fram ýmsan vanda sem kennaranemar, verðandi fagmenn í stærðfræðikennslu, glíma við. Vandamálin lýsa sér á mjög sambærilegan hátt og fræðimenn síðustu hálfrar aldar hafa gert grein fyrir (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985). Ein leið til að mæta slíkum vanda væri að kennaraefni fengju meiri tíma í kennaranámi til að fást við stærðfræði sína.

Í doktorsritgerð sinni kannaði Guðmundur Kristinn Birgisson (2002) glímu sex fyrsta árs háskólanema við valin stærðfræðiverkefni og á grundvelli könnunarinnar bjó hann til þekkingarfræðilegt líkan sem samanstóð af fimm flokkum. Segja má að flokkarnir endurspegli ólíka hugarheima sem nemendurnir fundu sig í þegar þeir unnu að stærðfræðiverkefnunum. Þetta eru: Heimur reynslu, hugtakaheimur, málheimur, heimur formlegrar stærðfræði, heimur raunverulegra stærðfræðilegra fyrirbrigða (Guðmundur Kristinn Birgisson, 2002).

Guðmundur segir að fljótt hafi komið í ljós að skoðun nemanda á því hvert væri eðli stærðfræðilegra fyrirbrigða hafi ráðið úrslitum um hvaða heimi hann tilheyrði. Hins vegar bendir Guðmundur á að milli hverra tveggja heima séu tengsl og að nemandi sem trúir því að stærðfræðileg þekking tilheyri tilteknum heimi geti brugðið sér í annan heim með viðfangsefni sín, jafnvel leyst þau þar og snúið til baka með lausnina (Guðmundur Kristinn Birgisson, 2002).

Óneitanlega vaknar sú spurning í tengslum við rannsóknina sem hér hefur verið til umfjöllunar hvort greining samkvæmt líkani Guðmundar á nemendum á stærðfræðikjörsviði í kennaranámi gæti ekki skilað sér í markvissari tilraunum kennara til að styrkja veika hæfnisþætti hvers og eins. Myndu til dæmis þeir þátttakendur sem glímdu við verkefni E og töldu allir að teikningar í tölvuforriti sönnuðu stærðfræðisetningu flokkast sem íbúar í heimi reynslu? Vafalaust yrði það einstaklingsbundið hvar veiku hlekkina væri að finna en niðurstaða rannsóknarinnar bendir þó til þess að ekki veiti af því að stuðla að frekari landvinningum flestra kennaranema í hugtakaheimi stærðfræðinnar og í heimi formlegrar stærðfræði þar sem röksemdafærsla skipar öndvegi.

Eins og að framan greinir hefur skapast áhugi á þróun kennsluhátta í stærðfræði í grunnskóla þar sem markmiðið er meðal annars að búa nemendum aðstæður til að byggja upp hugtakaskilning sinn og ná þannig betri árangri í námi og þessi stefna, hugsmíðahyggja, endurspeglast í nýjum kennslubókum hér á landi. Það er mikilvægt að því sé fylgt eftir með rannsóknum hvernig tekst að vinna í anda þessarar stefnu og hvaða árangur næst. Slík rannsókn myndi draga fram bæði sterkar og veikar hliðar á námi verðandi stærðfræðikennara og verða þannig vísbending um hvernig megi bæta námið á stærðfræðikjörsviði þannig að tryggt verði að kennarinn geti þegar á hólminn er komið ýtt undir sjálfstæða hugsun og vangaveltur nemenda sinna, stutt við rökhugsun þeirra og örvað þá til stærðfræðilegrar ígrundunar.

HEIMILDIR

Apple, M. W. (1993). *Official knowledge: Democratic education in a conservative age.* New York: Routledge.

California Commission on Teacher Credentialing. (2010). *California subject examinations for teachers*: *Mathematics subject matter requirements*. Sótt 2. janúar 2012 af http://www.cset.nesinc.com/CS_SMR_opener.asp.

Confrey, J. og Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. Í A. Gutiérrez og P. Boero (ritstjórar), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (bls. 305–345). Rotterdam: Sense Publishers. *Sótt 21. nóvember 2010 af* http://imo.pau.edu.tr/sibel/confreykazak_constructivism.pdf.

Freyja Hreinsdóttir og Friðrik Diego. (2009, 11. febrúar). *Gengi nýnema. Kynning á rannsókn á tengslum undirbúnings úr framhaldsskóla og árangurs nemenda í stærðfræði og íslensku á fyrsta ári kennaradeildar*. Opinn fyrirlestur í Háskóla Íslands.

Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir. (2006). *8–tíu: Stærðfræði: Kennsluleiðbeiningar* (2. útgáfa). Reykjavík: Námsgagnastofnun. Sótt 13. maí 2009 af http://www.nams.is/atta-tiu/atta_tiu_klb.pdf.

Guðbjörg Pálsdóttir, Guðrún Angantýsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2011). *Geisli 1A: Kennsluleiðbeiningar* (2. útgáfa). Reykjavík: Námsgagnastofnun. Sótt 2. maí 2011 af http://www.namsgagnastofnun.is/geisli/geisli_1a_klb.pdf.

Guðmundur Kristinn Birgisson. (2002). *Perceptions of truth: A qualitative inquiry into the nature of college students' epistemologies of mathematics*. Doktorsritgerð: Indiana University, Bloomington.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40* (1), 71–90.

Háskóli Íslands. *Kennsluskrá 2009–2010*. Sótt 5. nóvember 2010 af https://ugla.hi.is/kennsluskra/.

Kilpatrick, J. (1987) What constructivism might be in mathematics education. Í J. C. Bergeron, N. Herscovics og C. Kieran (ritstjórar), *Proceedings of the International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME) XI, Vol. 1* (bls. 3–27). Montreal: University of Montreal. Sótt 7. júní 2011 af http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED383532.pdf.

Kilpatrick, J., Swafford, J. og Findell, B. (ritstjórar). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington: National Academies Press. Sótt 7. júní 2011 af http://books.nap.edu/catalog.php?record_id=9822.

Long, C. T. og DeTemple, D. W. (2006). *Mathematical reasoning for elementary teachers* (4. útgáfa). New York: Pearson.

Math Forum. (2009). *Constructivism in the classroom*. Sótt 13. maí 2009 af http://mathforum.org/mathed/constructivism.html.

Matthews, M. R. (2000). Constructivism in science and mathematics education. Í D. C. Phillips (ritstjóri), *National Society for the Study of Education, 99th Yearbook* (bls. 161–192). Sótt 5. nóvember 2010 af http://wwwcsi.unian.it/educa/inglese/matthews.html.

Menntamálaráðuneytið. (1960). *Námsskrá fyrir nemendur á fræðsluskyldualdri*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1989). *Aðalnámskrá grunnskóla*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1998). *Markmið stærðfræðikennslu í grunnskólum og framhaldsskólum: Skýrsla nefndar til að koma með tillögur um hvernig efla megi námsgreinina stærðfræði og stærðfræðiáhuga nemenda í skólakerfinu*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (1999). *Aðalnámskrá grunnskóla: Stærðfræði*. Reykjavík: Höfundur.

Menntamálaráðuneytið. (2007). *Aðalnámskrá grunnskóla: Stærðfræði*. Reykjavík: Höfundur. Sótt 7. febrúar 2012 af http://www.menntamalaraduneyti.is/utgefid-efni/namskrar/nr/3953.

Menntamálaráðuneytið, skólarannsóknadeild. (1976). *Aðalnámskrá grunnskóla: Almennur hluti*. Reykjavík: Höfundur.

Niss, M. og Højgaard Jensen, T. (ritstjórar). (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København: Undervisningsministeriet. Sótt 15. apríl 2009 af http://pub.uvm.dk/2002/kom.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. New York: Princeton University Press.

Ragnhildur Bjarnadóttir. (2004). Að verða kennari: Sýn kennaranema á eigin starfshæfni. *Uppeldi og menntun*, *13*(1), 25–44.

Ragnhildur Bjarnadóttir. (2005). Hvernig styður Kennaraháskóli Íslands við starfshæfni kennaranema? *Uppeldi og menntun*, *14*(1), 29–48.

Ragnhildur Bjarnadóttir. (2008). Starfshæfni kennara frá sjónarhóli norrænna kennaranema. *Uppeldi og menntun*, *17*(2), 55–74.

Rice University. (2010). *Texas Examination of Educator Standards – Teacher competencies for mathematics (8–12).* Sótt 5. nóvember 2010 af http://math.rice.edu/~rusmp/geometrymodule/PDFdocuments/PDFdocuments/competencies.pdf.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Texas Education Agency. (2010). *TExES, Texas Examination of Educator Standards, Teacher competencies for mathematics (8–12): Preparation manual*. Sótt 5. nóvember 2010 af http://www.texes.ets.org/assets/pdf/testprep_manuals/068_principal_82762_web.pdf.

Greinin barst tímaritinu 30. júní 2010 og var samþykkt til birtingar 12. febrúar 2012

UM HÖFUNDANA

Friðrik Diego (fd@hi.is) er lektor í stærðfræði við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hann lauk BS-prófi í stærðfræði við Háskóla Íslands árið 1982, Maîtrise-prófi í hreinni stærðfræði frá Université de Paris VI árið 1982 og námi til kennsluréttinda við Háskóla Íslands árið 1994. Helstu áhugasvið hans hafa verið algebra og talnafræði en í seinni tíð hefur hann töluvert fengist við þrautastærðfræði í tengslum við íslenska og alþjóðlega stærðfræðikeppni.

Kristín Halla Jónsdóttir (khj@hi.is) er dósent í stærðfræði við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún lauk BA-prófi í stærðfræði og eðlisfræði við Háskóla Íslands árið 1971, diplóma-námi í uppeldis- og kennslufræðum við Háskóla Íslands árið 1970, MS-prófi í stærðfræði við University of Houston árið 1973 og Ph.D.-prófi við University of Houston árið 1975. Rannsóknir hennar hafa verið í stærðfræði nánar tiltekið á sviði grannfræði og algebru. Áhugi hennar og skrif hafa einnig beinst að sögu stærðfræðinnar.

Pre-service training of mathematics teachers with respect to conceptual understanding and constructivism

ABSTRACT

The participants in this study were twelve undergraduate students majoring in mathematics education at the university level in Iceland. The purpose of the study was to evaluate whether their pre-service training was sufficiently oriented towards strengthening the students' conceptual understanding in mathematics as well as their problem solving ability and analytical skills. The study was aimed at answering the question whether the students' preparation in mathematics was solid enough to enhance their competence to work as professional schoolteachers in the spirit of constructivism.

A short overview of constructivism in mathematics teaching is provided and, in order to show the constantly growing emphasis that this theory has been given in the Icelandic educational system, a brief overview is included of the curricular changes in mathematics for the past few decades in Iceland. It is pointed out that both the 1999 and the 2007 official curricula explicitly state the importance of problem solving and present a discussion on what it means to understand a mathematical concept. The growing emphasis on constructivism in mathematics teaching is also clearly witnessed in recently published mathematics textbooks for Icelandic primary schools.

The paper contains a short discussion on the importance of problem solving in connection with constructivism in mathematics teaching. In the second half of the 20th century problem solving was one of the key issues of mathematics as a field of study. In the skill of problem solving as well as in the theory of constructivism the questioning mind of the student is paramount.

The evaluation of the students' preparation was based on observations of their tackling five given mathematical problems, interviews with the students about the problems and the students' written solutions. The evaluation was based on the following research questions put forward in the study: 1) Do the students understand the problem well enough to realize how they should solve it? 2) Do the students use analytical skills in trying to solve the problem? 3) Do the students analyze the problem they are working on and show a questioning mind? Do the students try to see the problem in a wider perspective? 4) Can students be encouraged to analyze further a problem they have already solved?

To shed light on why the above research questions were chosen by the researchers, there is a brief mention of two reports on competency in mathematics teaching and one research article addressing the same subject. One of these reports is an official Danish report and the other an official American report. The research article describes an Icelandic study on how successfully the pre-service education of teachers promotes their overall competency.

The above mentioned five problems the students were given in this study include one ancient number theoretic problem in a typical problem solving style, a paradox of Zeno, some questions involving Fibonacci sequences, a conceptual problem concerning linear functions and approaches to a few geometric concepts through the use of graphic software. All five problems can be considered to be typical and important mathematical problems; each one is explained in the paper and a justification for their choice is given.

The findings suggest that the twelve students participating in this study are lacking in some of the necessary competences for a schoolteacher intending to use constructivistic methods to teach mathematics. Comparing our conclusions with the definitions of competency in mathematics teaching, in both the above mentioned Danish report and the American report, we find that the students' understanding of mathematical concepts as well as their ability to reason mathematically needs to be strengthened. Accordingly, we conclude that subject courses in pre-service education for mathematics teachers in Iceland should place more emphasis on those aspects of the training of mathematics teachers.

Keywords: Mathematical preparation, conceptual understanding, constructivism, competency, critical thinking, problem solving

ABOUT THE AUTHORS

Fridrik Diego (fd@hi.is) is an assistant professor at the School of Education, University of Iceland. He completed a Bachelor`s degree in mathematics from the University of Iceland in 1982, a Maîtrise degree in pure mathematics from Université de Paris VI in 1985 and an Education diploma from the University of Iceland in 1994. His main interests include algebra and number theory and, in later years, problem solving and national and international competition mathematics.

Kristin Halla Jonsdottir (khj@hi.is) is an associate professor at the School of Education, University of Iceland. She completed a Bachelor`s degree in mathematics and physics from the University of Iceland in 1971 and an Education diploma from the University of Iceland in 1970. She obtained a Master`s degree in mathematics from the University of Houston in 1973 and a Ph.D. degree in mathematics from the University of Houston in 1975. Her main research interest has been in mathematics; topology and algebra. Her additional interest and writings have concerned the history of mathematics.